EPFL 2011-2012 **Nom :** ____________________

GC6 **Prénom :** ____________________

Examen Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.

Exercice 1 : *Le pont de Sutong – 10 points*

Le pont de Sutong est le pont à haubans ayant la plus grande portée du monde (1088 mètres).

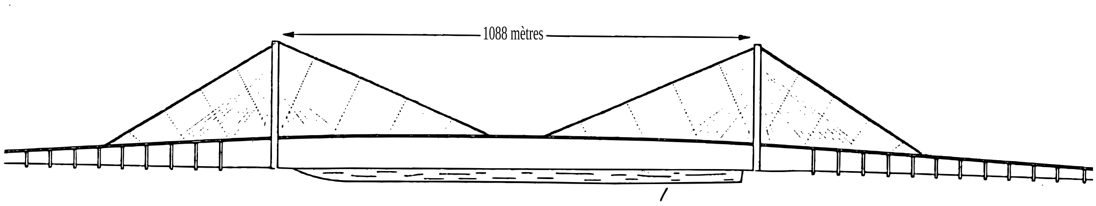

FIGURE 1 –

Nous considérons un pont très long supporté par plusieurs piliers et renforcé par des haubans (Figure 2). Une analyse préliminaire 2D peut être effectuée sur une partie du pont (Figure 3).

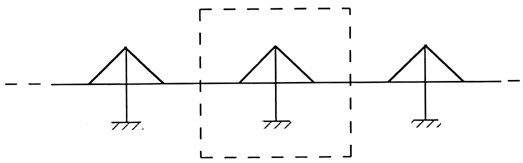

FIGURE 2 –

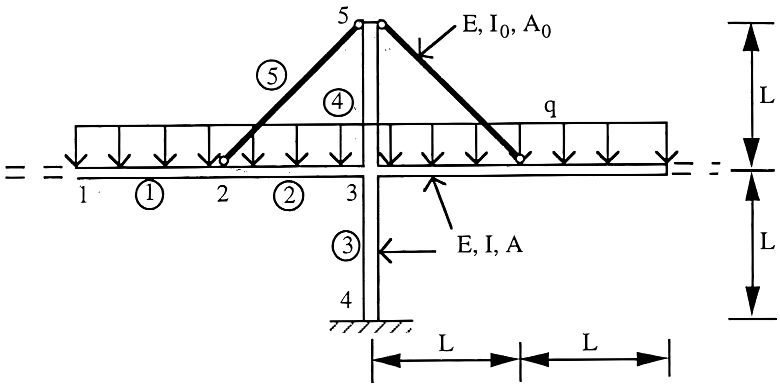

FIGURE 3 –

1. On prend la moitié de la structure dans la Figure 3 grâce à la symétrie du problème.
   – Donner les connectivités des éléments. (1 point)
   – Indiquer la nature de chaque élément (barre ou poutre) selon leur fonctions dans la demi-structure ainsi que la section considérée pour chaque élément. (1 point)
   – Définir les 6 degrés de liberté non nuls selon les conditions aux limites et les représenter dans un tableau. (2 points)
2. Donner le vecteur de charges équivalents pour l'élément ②. (1 point)
3. Donner les matrices de rigidité locales pour les éléments ②, ③ et ④. (2 points)
4. Calculer les coefficients de la matrice de rigidité assemblée qui concernent le noeud 3. (2 points)
5. Donner la réaction d'appui verticale en fonction du déplacement nodal (sans calculer ce déplacement). (1 point)

Correction

1. – Les connectivités des éléments et la nature de chaque élément sont répertoriées dans la Table 1.

Élément	Noeud 1	Noeud 2	Nature
1	1	2	poutre
2	2	3	poutre
3	3	4	poutre
4	3	5	poutre
5	2	5	barre

Table 1 – Les connectivités des éléments et la nature de chaque élément

– Prenant en compte les conditions aux limites et la symétrie du problème on obtient six dégrés de liberté non nuls : $\{v_1, u_2, v_2, \theta_2, v_5, v_3\}$. Les dégrés de liberté nuls et les raisons sont répertoriées dans la Table 2.

Dégré de liberté	Raison
u_1	symétrie
θ_1	symétrie
u_3	symétrie
θ_3	symétrie
u_4	condition au bord
v_4	condition au bord
θ_4	condition au bord
u_5	symétrie
θ_5	symétrie

Table 2 – Les dégrés de liberté nuls

2. Le vecteur de charges équivalents pour l'élément ② peut être écrit comme (annex 15.9 of TGC 6)

$$\boldsymbol{s} = \begin{Bmatrix} s_{u_2} \\ s_{v_2} \\ s_{\theta_2} \\ s_{u_3} \\ s_{v_3} \\ s_{\theta_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ qL/2 \\ qL^2/12 \\ 0 \\ qL/2 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

avec la composante correspondante à θ_3 égale a zéro.

3. La matrice de rigidité pour les six dégrés de liberté est donnée dans l'annexe 15.3 de TGC Vol. 6. Pour les éléments 3 et 4, les axes globaux sont tournés de 90° par rapport aux axes locaux. Ainsi, $c = cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $s = sin\frac{\pi}{2} = 1$.

– Pour l'élément ②, u_3 et θ_3 sont nuls.

$$\boldsymbol{k^{el2}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

– Pour l'élément ③, seul degré de liberté non nul est v_3, qui fait $k_{22}^{el3} = \frac{EA}{L}$ non nul.

– Pour l'élément ④, il y a deux degrés de liberté non nuls : v_3 et v_5.

$$\boldsymbol{k^{el4}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

4. Pour le noeud 3, seul degré de liberté non nul est v_3. Les éléments ②, ③ et ④ contribuent à la matrice de rigidité.

$$\boldsymbol{K} = \left[\begin{array}{c|cccccc} & v_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 & v_3 & v_5 \\ \hline v_1 & & & & & 0 & \\ u_2 & & & & & 0 & \\ v_2 & & & & & -\frac{12EI}{L^3} & \\ \theta_2 & & & & & -\frac{6EI}{L^2} & \\ v_3 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \left(\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L}\right) & -\frac{EA}{L} \\ v_5 & & & & & -\frac{EA}{L} & \end{array}\right] \tag{4}$$

5. Le noeud 4 n'est connecté qu'à l'élément 3 et donc la réaction d'appui peut directement être calculée à partir de l'équation d'équilibre sur cet élément. De plus, dans les éléments poutres, le comportement axial est découplé du comportement flexionnel, de telle manière que la réaction verticale est directement donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{K}_{axial}\boldsymbol{d}_{axial} = \begin{bmatrix} EA & -EA \\ -EA & EA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{f}_{axial} = \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_5 \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

La réaction d'appui vaut ainsi

$$R = -f_3 = EA(v_5 - v_3). \tag{6}$$